令和５年度採用

群馬県公立高等学校教員選考試験問題

数　　学

受験番号		氏名	

注　意　事　項

1　「開始」の指示があるまでは、問題用紙を開かないでください。

2　問題は、１ページから３ページまであります。「開始」の指示後、すぐに確認してください。

3　解答は、すべて解答用紙に記入してください。

4　「終了」の指示があったら、直ちに筆記具を置き、問題用紙と番号順に重ねた解答用紙を机の上に置いてください。

5　退席の指示があるまで、その場でお待ちください。

6　この問題用紙は、持ち帰ってください。

1　次の問いに答えなさい。ただし，解答は結果のみ記入しなさい。

(1)　1個のさいころを4回続けて投げるとき，3の倍数の目がちょうど2回出る確率を求めよ。

(2)　xyz 空間にある点P(3，−2，4)に対して，次の点の座標を求めよ。

①　zx 平面に関して点Pと対称な点

②　y 軸に関して点Pと対称な点

(3)　$x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ のとき，　$2x^2-6x-1$ の値を求めよ。

(4)　a を定数とする。関数 $f(x)=-x^2+2ax+a^2\ (0\leqq x\leqq 2)$ の最大値Mを，a の式で表せ。

(5)　AB＝3，BC＝6，CA＝4である三角形ABCの内心をIとし，直線AIと辺BCとの交点をDとする。このとき，AI：IDを最も簡単な整数比で示せ。

(6)　方程式 $\cos 2\theta+\sin\theta=0$ を解け。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(7)　直線 $y=-x-1$ が，円 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ によって切り取られる線分の長さを求めよ。

(8)　点A(3，4)を通り，$\vec{n}=(2,\ 3)$ が法線ベクトルである直線の方程式を求めよ。

(9)　定積分 $\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$ を求めよ。

2　a, b を実数の定数とする。3次方程式 $x^3-x^2+ax+b=0$ が $2-i$ を解にもつとき，この方程式の他の解と，a, b の値を求めなさい。

3　c を定数とし，関数 $f(x)$ は，$x=c$ で微分可能であるとする。

このとき，極限値 $\lim_{h \to 0}\frac{f(c+3h)-f(c-h)}{h}$ を，$f'(c)$ を用いて表しなさい。

4　$AB=AC=AD=CD=\sqrt{7}$，$BC=2$，$BD=3$ である四面体ABCDについて，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1)　頂点Aを通り平面BCDに垂直な直線と三角形BCDとの交点をHとする。このとき，点Hは三角形BCDの外心であることを証明せよ。

(2)　四面体ABCDの体積 V を求めよ。

5　数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}$　$(n=1, 2, 3, \cdots)$ を満たしている。このとき，(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　すべての自然数 n に対して，$a_n \leqq 3$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　すべての自然数 n に対して，$3-a_{n+1} \leqq \frac{1}{3}(3-a_n)$ が成り立つことを証明せよ。

(3)　$\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ。

6　「$t>0$ のとき，不等式 $2e^t>2+2t+t^2$ が成り立つことを示せ。」という問題に対して，生徒Ａは次のように解答した。下の問いに答えなさい。

＜生徒Ａの解答＞
与えられた不等式の左辺から右辺を引いて，

$f(t)=2e^t-2-2t-t^2$　とおくと

$f(0)=2-2=0$

$f(0)=0$ により，$t>0$ のとき $f(t)>0$ となるから，不等式 $2e^t>2+2t+t^2$ が成り立つ。

(1)　生徒Ａの解答には間違いがある。その間違えた部分を指摘し，生徒Ａの解答が間違いである理由について，簡潔に説明せよ。

(2)　「$t>0$ のとき，不等式 $2e^t>2+2t+t^2$ が成り立つことを示せ。」という問題に対する正しい解答を書け。

7　「『ある製品Ａ，Ｂを１個作るのに必要な原料 a，b の量』，『原料 a，b の１日当たりの使用限度量』，『製品Ａ，Ｂを販売したときの１個当たりの利益』が次の表のように定められているとき，利益を最大にするには，１日に製品Ａ，Ｂを何個ずつ作ればよいか。」という問題を扱う授業について，下の問いに答えなさい。

	製品Ａ	製品Ｂ	１日当たりの使用限度量
原料 a	1kg	2kg	200kg
原料 b	3kg	1kg	400kg
１個当たりの利益	2000 円	1000 円	

(1)　この問題について，ＩＣＴを活用して，教員が説明したり生徒に考察させたりする授業を考える。あなたなら，ＩＣＴを活用してこの問題の解法についてどのように説明するか。また，生徒が問題に取り組む際に，どのような見方や考え方を重視するよう指導するか。問題解決の過程を踏まえ，それぞれ簡潔に書け。

(2)　数学では，ＩＣＴを活用することで，問題の正解が容易に得られてしまうことがある。このことを踏まえ，授業でＩＣＴを用いる際に留意すべき点を，簡潔に書け。

数学　解答用紙	2枚中の1	受験番号		氏名	

（5年）

1

(1)		(2)	① ②	(3)		(4)		(5)	
(6)		(7)		(8)		(9)			

2

3

4

(1)	(2)

数学　解答用紙	2枚中の2	受験番号		氏名	

（5年）

5

(1)	(2)	(3)

6

(1)	(2)

7

(1)	(2)

以下はあくまでも解答の一例です。

数学　解答用紙	２枚中の１	受験番号		氏名	

（５年）

1（60点）（1）～（3）：6点×3　，（4）以降：7点×6

(1)	$\frac{8}{27}$	(2)	① (3, 2, 4) ② (−3, −2, −4)	(3)	-3	(4)	$M=\begin{cases} a^2 & (a<0) \\ 2a^2 & (0\leqq a<2) \\ a^2+4a-4 & (2\leqq a) \end{cases}$	(5)	AI：ID＝7：6
(6)	$\theta=\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$	(7)	$2\sqrt{2}$	(8)	$2x+3y-18=0$	(9)	$\frac{9}{4}\pi$		

2（20点）

実数係数の方程式が $2-i$ を解に持つことから，共役な複素数 $2+i$ も解となる。

もう１つの解を α とすると，３次方程式の解と係数の関係から

$(2+i)+(2-i)+\alpha=1$　・・・①

$(2+i)(2-i)+(2-i)\alpha+(2+i)\alpha=a$　・・・②

$(2+i)(2-i)\alpha=-b$　・・・③

①～③より，$\alpha=-3$，$a=-7$，$b=15$　　したがって，他の解は $2+i$ と -3，$a=-7$，$b=15$　・・・・・・（答）

3（20点）

$h\to0$ のとき，$3h\to0$，$-h\to0$ であるから，

（与式）$=3\lim_{3h\to0}\frac{f(c+3h)-f(c)}{3h}+\lim_{-h\to0}\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}$

$f(x)$ は $x=c$ で微分可能であるから，

（与式）$=3f'(c)+f'(c)=4f'(c)$　・・・・・・（答）

4（30点）

(1)

（証明）

△ABH，△ACH，△ADH について

AB＝AC＝AD，AH が共通であることから

直角三角形の斜辺と他の１辺が等しいので

△ABH≡△ACH≡△ADH

よって，BH＝CH＝DH　となることから，

点 H は△BCD の外心である。　（証明終）

(2)

余弦定理より，$\cos\angle CBD=\frac{2^2+3^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot2\cdot3}=\frac{1}{2}$

よって，$\angle CBD=60^\circ$ であるから，

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\sin60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

また，正弦定理より $\frac{CD}{\sin\angle CBD}=2BH$　∴ $BH=\frac{\sqrt{21}}{3}$

$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\frac{\sqrt{42}}{3}$

となることから

$V=\frac{1}{3}\triangle BCD\cdot AH=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{42}}{3}=\frac{\sqrt{14}}{2}$　・・・・・・（答）

数学　解答用紙	２枚中の２	受験番号		氏名	

（５年）

5 （30点）

(1)

（証明）

n についての数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき

$a_1=1\leqq 3$ であり条件を満たす。

(ii) $n=k$ のとき（k：自然数）

$a_k\leqq 3$ が成り立つと仮定すると

$a_{k+1}=\sqrt{a_k+6}\leqq 3$ となり $n=k+1$ でも成り立つ。

(i)，(ii)より，すべての自然数 n で $a_n\leqq 3$ が成り立つ。　（証明終）

(2)

（証明）

漸化式より

$$3-a_{n+1}=3-\sqrt{a_n+6}$$
$$=\frac{(3-\sqrt{a_n+6})(3+\sqrt{a_n+6})}{3+\sqrt{a_n+6}}$$
$$=\frac{3-a_n}{3+\sqrt{a_n+6}}\leqq\frac{3-a_n}{3}$$

$(\sqrt{a_n+6}>0$ より$)$

よって，すべての自然数 n で

$$3-a_{n+1}\leqq\frac{1}{3}(3-a_n)$$

が成り立つ。　（証明終）

(3)

(2)の結果より

$$3-a_n\leqq\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot(3-a_1)$$
$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot 2$$

ここで，(1)より　$0\leqq 3-a_n$

よって，　$0\leqq 3-a_n\leqq\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot 2$

ここで，　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot 2=0$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}(3-a_n)=0$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}a_n=3$$ ……（答）

6 （20点）

(1)

（例）

$f(0)=0$ を根拠として，$t>0$ のとき $f(t)>0$ としている部分が間違いである。

$t>0$ のときの $f(t)$ の増減を調べ，$t>0$ における $f(t)$ の値が常に正であることを示す必要があるため。

(2)

（証明）　$f(t)=2e^t-2-2t-t^2$　とおくと

$f'(t)=2e^t-2-2t$　，　$f''(t)=2e^t-2$

$t>0$ のとき $e^t>1$ より，$f''(t)=2e^t-2>0$

よって，$t>0$ で $f'(t)$ は単調に増加する。

また，$f'(0)=0$ より，$t>0$ で　$f'(t)>0$ となり，

$t>0$ のとき $f(t)$ は単調に増加する。

さらに，$f(0)=0$ であるから，$t>0$ のとき $f(t)>0$ となる。

したがって，$t>0$ のとき，与えられた不等式は成り立つ。　（証明終）

7 （20点）

(1)

（例）製品Ａ，Ｂをそれぞれ x 個，y 個作ったときの利益を k 円として，連立不等式 $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $x+2y\leqq 200$, $3x+y\leqq 400$ の表す領域を，グラフ描画ソフトなどで示すとともに，直線 $2000x+1000y=k$ がこの領域と共有点を持つときの k の最大値について，k をパラメータとして変化させ，直線を実際に動かしながら説明する。

生徒に考察させる際には，グラフのどのような部分を詳細に検討する必要があるかを見通したり，元の事象における解の意味を考えたりすることを大切にするよう指導する。

(2)

（例）ＩＣＴを活用する場合には，解答を求めることのみを目的とせず，得られた結果を基にして，「なぜ，そのような結果になるのか」を生徒に問うなどして，理解を深めさせるように留意する必要がある。